

Investition und Finanzierung

Aufgabenblatt 11: Entscheidung unter Risiko

1. Aufgabe: Mü-Sigma-Prinzip

Die dividendenlosen Aktien der POI AG notieren zurzeit bei 80 € an der Börse. Laut einer Finanzanalyse ist der Kurs der POI-Aktien in einem Jahr K^{POI} wie folgt verteilt.

x	90	0	110	80	75	50
$P(K^{POI} = x)$	0,1	0,01	0,24	0,35	0,2	0,1

Eine Finanzanalyse der GHJ AG einer anderen Agentur beschreibt die Rendite R^{GHJ} mittels der folgenden Dichtefunktion.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{0,0512 \pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 0,04x + 0,02^2}{0,0512}\right)$$

Sie sind in der Situation, für verschiedene Ihrer Kunden, Anlageempfehlungen für die POI- oder die GHJ-Aktien abgeben zu müssen. Dafür haben Sie zwei Präferenzfunktionen Φ_1 und Φ_2 zur Verfügung, mit denen auf Grundlage des μ - σ -Prinzips eine Entscheidung getroffen werden soll.

$$\Phi_1(\mu, \sigma) := \mu + 2 \sigma$$

$$\Phi_2(\mu, \sigma) := \mu - 2 \sigma$$

Ihr Kunde Meier beschreibt sich selbst als sicherheitsorientiert, während Ihr Kunde Schulze eher spekulativ orientiert investieren möchte. Geben Sie für Ihre Kunden passende Anlageempfehlungen ab!

Lösung:

POI-Aktien:

Entscheidung wird auf Basis der Rendite getroffen:

$$R^{POI} = \frac{K^{POI} - K}{K}$$

wobei K der jetzige Kurs ist und K^{POI} der zufällige Kurs in einem Jahr.

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rendite:

x						-0,375
$P(R^{POI} = x)$	0,1	0,01	0,24	0,35	0,2	0,1

Investition und Finanzierung

Erwartete Rendite:

$$\mu^{POI} = E(R^{POI}) = \dots\dots\dots$$

Volatilität:

$$E((R^{POI})^2) = \dots\dots\dots$$

$$Var(R^{POI}) = E((R^{POI})^2) - (E(R^{POI}))^2 = \dots\dots\dots$$

$$\sigma^{POI} = \sqrt{Var(R^{POI})} = \dots\dots\dots$$

GHJ-Aktien:

Umformungen der gegebenen Dichtefunktion:

Bei einem Vergleich mit der Dichte der Normalverteilung ϕ können μ^{GHJ} und σ^{GHJ} abgelesen werden:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

d.h. $R^{GHJ} \sim \dots\dots\dots$ bzw. $\mu^{GHJ} = \dots\dots\dots$ und $\sigma^{GHJ} = \dots\dots\dots$

Empfehlung:

Da Meier $\dots\dots\dots$ orientiert ist, verwenden wir für ihn die Präferenzfunktion Φ_2 .
Bei dieser $\dots\dots\dots$ wachsende Volatilität die Präferenz. Diese Eigenschaft steht für Risiko $\dots\dots\dots$.

$$\Phi_2(\mu^{POI}, \sigma^{POI}) = \dots\dots\dots$$

$$\Phi_2(\mu^{GHJ}, \sigma^{GHJ}) = \dots\dots\dots$$

Meier wird eine Investition in die $\dots\dots\dots$ -Aktien empfohlen.

Investition und Finanzierung

Für den anderen Kunden Schulze verwenden wir _____ :

$$\Phi_1(\mu^{POI}, \sigma^{POI}) = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Phi_1(\mu^{GHJ}, \sigma^{GHJ}) = \underline{\hspace{10em}}$$

In diesem Fall sollten die Aktien der _____ AG empfohlen werden.

Investition und Finanzierung

2. Aufgabe: Bernoulli-Prinzip

Ein Unternehmen besitze eine Fabrikhalle im Wert von 2 Mio. €. Bei einem möglichen Brand innerhalb des nächsten Jahres würde ein Schaden von 1,3 Mio. € entstehen. Die Brandgefahr lässt sich jedoch durch verschiedene Maßnahmen reduzieren. Dazu gehören z.B. die Installation einer größeren Anzahl von Brandmeldern oder auch der Einsatz schwer entflammbarer Materialien. Die Wahrscheinlichkeit eines Brandes innerhalb eines Jahres werde mit p bezeichnet und wird von Investitionen in den Brandschutz i.H.v. I für $I \in \{0, 50.000, 100.000\}$ durch

$$p = 0,5 - 0,1 \frac{I}{50.000}$$

beschrieben. Im Falle einer Investition von 200.000 € gilt $p = 0,2$. Das Unternehmen muss sich für eine der Alternativen entscheiden und kalkuliert dabei mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = 50 \sqrt{x}$$

- a) Entscheiden Sie sich für eine der Alternativen unter Verwendung des Bernoulli-Prinzips!
- b) Nachdem sich das Unternehmen für geeignete Brandschutzmaßnahmen entschieden hat, wird zusätzlich eine Versicherung der Halle für das nächste Jahr geprüft. Eine Versicherungsgesellschaft bietet an, jegliche Brandschäden vollständig zu versichern. Die Versicherungsprämie liegt dafür bei 300.000 €. Beurteilen Sie diese Entscheidung ebenfalls mithilfe des Bernoulli-Prinzips! Vergleichen Sie mit einem rein finanziellen Entscheidungskriterium!

Lösung:

a)

Nach dem Bernoulli-Prinzip wird die Alternative gewählt, die den höchsten _____ liefert.

Der Wert der Halle nach einem Jahr abzüglich eventueller Investitionen werde mit V bezeichnet.

Investition und Finanzierung

Fall 1: $I = 0$

v		
$u(v)$		
$P(V = v) = P(u(V) = u(v))$		

$\Rightarrow E(u(V)) =$

Fall 2: $I = 50.000$

v		
$u(v)$		
$P(V = v) = P(u(V) = u(v))$		

$\Rightarrow E(u(V)) =$

Fall 3: $I = 100.000$

v		
$u(v)$		
$P(V = v) = P(u(V) = u(v))$		

$\Rightarrow E(u(V)) =$

Fall 4: $I = 200.000$

v		
$u(v)$		
$P(V = v) = P(u(V) = u(v))$		

$\Rightarrow E(u(V)) =$

Eine Investition i. H. v. führt zum höchsten erwarteten Nutzen und wird daher ausgewählt.

Investition und Finanzierung

b)

Im Falle, dass eine Versicherung abgeschlossen wird, spielt es finanziell _____ Rolle, ob es brennt oder nicht. Es werden _____ für die Brandschutzmaßnahmen bezahlt und weitere 300.000 € für den Versicherungsschutz.

Es ergibt sich ein Vermögen von _____ mit einem Nutzen von _____. Dieser Nutzen ist _____ als der erwartete Nutzen ohne Versicherung von 60.736,7.

Betrachtet man nur das Vermögen, so ist dessen Erwartungswert ohne Versicherung

$$E(V) = \underline{\hspace{10cm}}$$

und mit der Versicherung fixiert bei _____. Trotz des _____ Vermögens bei Abschluss der Versicherung bevorzugt das risiko _____ Unternehmen aufgrund seiner konkaven Nutzenfunktion die Variante mit Versicherung, die _____ Planungssicherheit bietet.

Investition und Finanzierung

3. Aufgabe: Bayes-Regel und Bernoulli-Prinzip

Ein Investor hat mehrere Anlagealternativen zur Auswahl: Eine Finanzanlage mit fester (F) und eine mit variabler (V) Verzinsung sowie zwei Aktienfonds ($A1$ und $A2$). Er geht davon aus, dass drei unterschiedliche Entwicklungen (fallende (f), gleichbleibende (g) und steigende (s) Zinsen) eintreten können, die dann einen Einfluss auf die Renditen der Investitionen haben werden. Die vom Investor erwarteten Renditen in Abhängigkeit vom eingetretenen Zustand lauten:

	f	g	s
F	0,07	0,07	0,07
V	0,06	0,07	0,08
$A1$	0,09	0,07	0,05
$A2$	0,13	0,08	0,00

Der Investor schätzt folgende Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände f , g und s :

Zustand	f	g	s
Wahrscheinlichkeit	0,5	0,1	0,4

- a) Für welche Anlagealternative entscheidet er sich nach der Bayes-Regel?
- b) Welche Entscheidung trifft der Investor, wenn er sich am Bernoulli-Prinzip orientiert und seine Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x + 0,93)$ lautet?

Lösung:

a)

Bei der Bayes-Regel wird nach dem _____ der Entscheidungsgröße (hier Rendite) entschieden.

$E(F) =$ _____

$E(V) =$ _____

$E(A1) =$ _____

$E(A2) =$ _____

Die größte erwartete Rendite liefert _____.

Investition und Finanzierung

b)

Beim Bernoulli-Prinzip wird _____ der Bildung des Erwartungswerts noch eine _____ funktion verwendet.

	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>s</i>
$u(F)$			
$u(V)$			
$u(A1)$			
$u(A2)$			

$E(u(F)) =$ _____

$E(u(V)) =$ _____

$E(u(A1)) =$ _____

$E(u(A2)) =$ _____

Der maximale erwartete Nutzen wird von _____ geliefert.

Investition und Finanzierung

4. Aufgabe: Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie

Einem Spieler wird die folgende Lotterie angeboten. Mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,6$ erhält der Spieler 100 € und ansonsten 64 €. Ansonsten hat er kein Vermögen. Der Spieler entscheidet nach der Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$.

- a) Bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent des Spielers bei dieser Lotterie!
- b) Welche Risikoneigung hat der Spieler? Begründen Sie Ihre Entscheidung und gehen Sie dabei auch auf den Begriff der Risikoprämie ein!
- c) Hat ein anderer Spieler mit der Nutzenfunktion $u(x) = x^{0,75}$ ein höheres oder ein niedrigeres Sicherheitsäquivalent als der Entscheider aus a)?

Lösung:

a)

Das Ergebnis der Lotterie ist eine Zufallsvariable L mit

.....

Die Lotterie liefert einen erwarteten Nutzen von

$E(u(L)) =$

Das Sicherheitsäquivalent CE ist ein sicheres Vermögen, das den Entscheider gegenüber einer Teilnahme an der Lotterie macht, d. h. den liefert wie die Lotterie.

Es soll daher gelten. Das führt zur Gleichung Daher ist

.....

b)

Die Risikoneigung lässt sich erkennen, wenn man das mit dem rein der Lotterie vergleicht.

Investition und Finanzierung

Die Lotterie selbst hat den Erwartungswert _____. Hat der Spieler die Wahl zwischen einer sicheren und im Erwartungswert finanziell äquivalenten Zahlung von _____ bringt das den Nutzen _____

Dieser Nutzen ist _____ als der erwartete Nutzen der Lotterie, sodass sich der Spieler für die sichere Variante entscheidet. Der Spieler ist daher _____.

Die _____ zwischen dem finanziellen Erwartungswert der Lotterie und dem Sicherheitsäquivalent wird als Risikoprämie RP bezeichnet.

Die Risikoprämie beschreibt den im Mittel mindestens geforderten Gewinn des Spielers, wenn er an der Lotterie teilnehmen würde. Eine _____ Risikoprämie steht für einen risikoaversen Spieler, während eine _____ Risikoprämie für einen risikoaffinen Spieler steht.

c)

Die Nutzenfunktion $u(x) = x^{0,75}$ schätzt den Nutzen größerer Vermögen _____ ein als $u(x) = \sqrt{x}$, der Grenznutzen nimmt _____ ab, sodass diese Nutzenfunktion für einen _____ risikoaversen Spieler steht. Einem _____ risikoaversen Spieler muss eine _____ Risikoprämie gezahlt werden ($CE = E(L) - RP$) und daher steigt das Sicherheitsäquivalent an:

Auch dieser Spieler ist risikoavers, denn _____